·成果介绍·

我国在仿射微分几何领域做出高水平成果

李安民 赵国松

(四川大学数学系)

【摘要】 本文概述了仿射微分几何发展概况，介绍了国家自然科学基金支持项目“整体微分几何”在仿射微分几何领域的研究进展，并提出了仿射微分几何领域进一步研究的方向。

一、发展概况

仿射微分几何是微分几何的一个重要分支，它是德国大数学家布拉施克(W. Blaschke)等人按照克莱茵(F. Klein)的几何分类思想于本世纪初创立的，其主要目的是把通常欧氏空间的微分几何推广到么模仿射空间。通常欧氏空间的微分几何研究曲面(或者子流形)在运动群下的微分不变量和积分不变量，而仿射微分几何则研究曲面在么模仿射变换(即行列式等于1的变换)群下的微分不变量和积分不变量。本文所说的仿射微分几何有时也称等仿射微分几何。

在20年代，仿射微分几何经历了一个十分辉煌的发展时期。以布拉施克为首的一大批数学家，如 L. Berwald, H. Liebmann, G. Fubini, E. Céch, G. Pick, J. Radon, G. Tziteica, W. Süss, E. Salkowski 和 G. Thomsen 等在该领域从事研究，取得了一大批研究成果，这些成果汇集于布拉施克的名著《微分几何》第二卷。我国微分几何先躯、著名数学家苏步青教授在20年代后期对仿射微分几何作出了重要贡献，他的成就总结在它的专著《仿射微分几何》(科学出版社，1982)一书中。

由于么模仿射变换群比运动群大得多，为了得到满意的理论，必须对曲面加上很强的条件，布拉施克所选择的最自然的条件，就是曲面是局部严格凸的。有了凸性的假定，使得能够在曲面上引入一个正定的二次微分形式，它的原型就是经典曲面论中的第二基本形式，这样就在曲面上定义了一个正定的黎曼度量，称为布拉施克度量或仿射度量，于是黎曼几何的概念就可以使用了。

设 M 是 $n+1$ 维么模仿射空间 A^{n+1} 中局部严格凸的超曲面。对 M 的每一点 x 可以仿射不变地配置一条通过点 x 且与 M 横截的直线，称为 M 在点 x 的仿射法线。若也用 x 表示点 x 的位置向量，用 Δ 表示 M 上关于布拉施克度量的拉普拉斯算子，则

$$\xi=(1/n)\Delta x$$

称为仿射法向量，点 x 处的仿射法线就是通过点 x 且平行于 ξ 的直线。

如果超曲面的所有仿射法线交于一点(有限点或无穷远点)，则称此超曲面为仿射球，称交点为仿射中心。依照仿射中心在曲面的凹侧、凸侧和无穷远点，仿射球依次称为椭圆型、双曲型和抛物型的。通常的二次超曲面中，椭球面、椭圆抛物面和凸双曲面是仿射球的例子，其中椭球面是椭圆型的，椭圆抛物面是抛物型的，双曲面是双曲型的。在欧氏空间中，当用通常法

线代替仿射法线时，具有法线交于一点性质的曲面必定是球面或者平面，并且作为局部定理这也是对的。而仿射球则广泛得多，除了上面提到的三种二次曲面外，由方程

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1$$

确定的曲面也是仿射球，其中x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1}是A^{n+1}中的坐标。

仿射球是仿射微分几何中最基本最重要的曲面。从下面的事实可以意识到即使这个看起来很单纯的仿射球，要研究它并非容易的事。一个局部严格凸的超曲面，局部上可以表示为

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

它是抛物型仿射球的条件可以写成

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 1, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n$$

通过 Legendre 变换，椭圆型和双曲型的仿射球的条件可以写成

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = (L_1 u)^{-n-2}$$

其中，$u(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$是$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的 Legendre 变换函数，$L_1$是$M$的仿射平均曲率，它是一个常数。对仿射球的研究，归结为对上述 Monge-Ampére 型方程的研究。

由于仿射微分几何中涉及大量的高阶非线性偏微分方程，如上面的 Monge-Ampére 方程，仿射微分几何的研究对促进偏微分方程的发展有十分重要的意义。此外，仿射微分几何在数学的别的领域，以及在物理学中有广泛的应用，因而它吸引着许多数学家去研究。最近30年来，由于一批著名的数学家如 E. Calabi, L. Nirenberg, A. Pogorelov，陈省身，丘成桐，郑绍远，U. Simon, K. Nomizu 等人的努力，仿射微分几何特别是整体仿射微分几何的研究取得了长足的进展，这主要表现在完成了完备的仿射球的分类，在仿射极大曲面的仿射伯恩斯坦问题、仿射球的局部分类、仿射等周不等式等方面取得了重要进展。

十年前，我国在仿射微分几何领域的研究水平与发达国家相比，差距很大。改革开放以来，由于国家重视，发展很快。在近几年仿射微分几何的几次重要的国际学术会议上，我国都有代表应邀在会上报告自己的研究工作。我国的一些研究成果被国外广泛引用，国外一些刊物纷纷把仿射微分几何方面的论文聘请我国专家评审。现在，我国在仿射微分几何领域的研究水平已接近西方发达国家的水平。

二、我国研究进展

“整体微分几何研究”是国家自然科学基金支持的项目(1988—1990年)。该项目在仿射微分几何领域取得了如下几方面的进展:

1. 完备仿射球的分类

仿射微分几何中有两种完备性的概念，一种是关于布拉施克度量的完备性，称为仿射完备或者简称完备；另一种是关于欧氏空间诱导度量的完备性，称为欧氏完备。

微分几何中的问题主要是整体性的。完备仿射球的分类是仿射微分几何中最基本最重要的整体问题。世界著名数学家陈省身教授说:“仿射球的研究是微分几何美妙的一章”。完备椭圆型仿射球的分类由布拉施克和 R. Schneider 等人完成。完备抛物型仿射球的分类以及相

关的 Monge–Ampére 方程 $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)=1$ 的整体凸解的唯一性问题是由 Calabi, Pogorelov, Nirenberg, 丘成桐，郑绍远等人解决的。完备双曲型仿射球的分类问题是复杂和迷人的。关于这个问题，Calabi 有一个著名的猜测，他本人也在假定曲面有很强的对称性的条件下研究过这个问题。以后丘成桐、郑绍远，S. Gigena，T. Sasaki 等许多数学家都研究过这个问题。在文献[2]中，郑绍远和丘成桐实际上在欧氏完备的假定下解决了 Calabi 猜测。一个完备的双曲型仿射球是否是欧氏完备的，这是一个深入的、实质性的问题。在文献[7]中，我们对凸曲面回答了这个问题，即对凸曲面这种重要情形解决了 Calabi 猜测。在文献[8]中我们证明了：一个完备的双曲型仿射球是欧氏完备的。结合丘成桐和郑绍远的工作，彻底解决了 Calabi 猜测，完成了完备双曲型仿射球的分类。

2. 仿射伯恩斯坦问题

仿射平均曲率为零的超曲面称为仿射极大曲面，它是仿射体积变分的极值曲面。类似于黎曼几何中极小曲面论的伯恩斯坦问题，仿射极大曲面论中也有仿射伯恩斯坦问题，有两种表述，一是陈省身 1978 年提出的一个猜测：若定义在整个 A^2 上的严格凸函数 f 的图是一个仿射极大曲面，则 f 是二次函数，即 f 的图是一个椭圆抛物面；另一是 Calabi 提出的：一个完备的仿射极大曲面是否一定是椭圆抛物面。Calabi 在假定欧氏完备和（仿射）完备这两个完备性条件下回答了这个问题。正如 Calabi 所指出的，这两个完备性的假定太强，它们之间的关系不清楚，即是否可以互相被推出。于是，包括 Calabi 本人在内的许多数学家都试图取消一个完备性，而加上更弱的假定来证明这个猜测。在文献[4]中，我们对仿射极大曲面导出了一个 Weierstrass 表示公式，原则上这在局部意义下给出了所有仿射极大曲面。我们还利用仿射法线的分布（即仿射高斯映射）来研究仿射极大曲面，证明：一个完备的仿射极大曲面若不取四个处在一般位置的方向，则它一定是椭圆抛物面。

3. 常曲率仿射球的局部分类

按布拉施克度量为常曲率空间的仿射球有多少？这也是仿射微分几何中重要的问题之一。在文献[9]中，我们和西德的 G. Penn 确定了 A^3 中标量曲率为常数的所有仿射球；余建辉在他的硕士论文[11]中分类了 A^4 中常截面曲率的仿射球；在文献[6]中，我们分类了 A^{n+1} 中标量曲率为 0 和为正常数的所有仿射球。在此基础上，我们同比利时的 L. Vranchen 和西德的 U. Simon 完成了 A^{n+1} 中常截面曲率仿射球的分类。

我们还证明了若干刚性唯一性定理，推导了各阶仿射平均曲率的变分公式，出版了中文专著《仿射微分几何》，还同 U. Simon 教授合写了英文专著《Global Affine Differential Geometry》(1992 年在德国出版)，该书是总结最近几十年仿射微分几何成就的第一部英文专著。

三、发展方向

仿射微分几何中的问题很多，我们觉得以下五个方面是基本的重要的：

1. 仿射伯恩斯坦问题　这是仿射微分几何中目前尚未解决的最重要的问题之一，是许多数学家关注的一个难题。正如陈省身教授所说，这个问题“因为基本方程是四阶的，产生了严重的困难，但也给数学家提出了一个挑战，它的进展需要创见和努力”。

2. 仿射等周不等式　仿射等周不等式已由布拉施克，L. A. Santaló 和 A. Deicke 获得，它

在微分方程、泛函分析等许多领域有很多重要的应用。由仿射等周不等式可以导出许多不等式。1956 年 H. Busemann 和 C. M. Petty 提出了 10 个与仿射等周不等式有关的问题，目前绝大多数仍未被解决[13]。

3. 一般仿射流形的微分几何 把仿射空间的微分几何推广到一般的仿射流形(即具有仿射联络的微分流形)是十分自然的考虑。目前美国的 K. Nomizu 和德国的 U. Pinkall 等人在这方面刚开始做了一些研究。

4. 非退化超曲面的研究 用非退化的黎曼度量代替正定的布拉施克度量，这也是很自然的考虑。目前这方面已有许多研究，但还是开始，很多基本问题还没有得到解决。

5. 复仿射微分几何 在实仿射空间的微分几何有了一定的发展时，必然会导致复仿射空间的微分几何。目前这方面的研究甚少，只有零星的文献散见，基本的理论框架还未形成。

参 考 文 献

[1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitatrtheorie, Band 2, Berlin, 1923.

[2] S. Y. Cheng and S. T. Yan, Complete affine hypersurfaces, Part I. the completeness of affine metrics, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **39** (1986), 839—866.

[3] Li An-Min, Uniqueness theorems in affine differential geometry, Part I, *Results in Math.*, **13** (1988), 281—307.

[4] Li An-Min, Affine maximal surfaces and harmonic functions, Lec. Notes in Math., 1369, 142—151.

[5] Li An-Min, Variational formulas for higher offine mean curvature, *Results in Math.*, **13** (1988), 318—326.

[6] Li An-Min: Some theorems in affine differential geometry, *Acta Mathematica Sinica*, New Series **5**, 4 (1989), 345—354.

[7] Li An-Min, Calabi Conjecture on Hyperbolic affine Hyperspheres, *Math. Z.*, 203 (1990), 483—491.

[8] Li An-Min, Calabi Conjecture on Hyperbolic affine Hyperspheres (2), Preprint No. 248 / 1990, TV Berlin.

[9] Li An-Min and G. Penn, Uniqueness theorems in affine differential geometry, Part II, *Results in Math.*, **13** (1988), 308—317.

[10] 李安民，赵国松，仿射微分几何，四川教育出版社出版，1990。

[11] 余建辉，A^4中常截面曲率仿射球，四川大学学报(自然科学版)，**27**，4(1990)。

[12] 苏步青，仿射微分几何，科学出版社，1982。

[13] E. Lutwak, Selected affine isoperimetric inequalities, Preprint Polytechnic University.

[14] L. Vranchen, Li An-Min and U. Simon, Affine spheres with constant affine sectional curvature, to appear.

THE MODERN DEVELOPMENTS OF AFFINE DIFFERENTIAL GEOMETRY

Li An-Min Zhao Guosong

(Department of Mathematics, Sichuan University)

Abstract

This paper reviewed the development history of affine differential geometry, introduced the research results of global affine differential geometry financed by the National Science Foundation and pointed out the development directions of affine differential geometry in future.